

# Эпистемология компьютерных доказательств

## некоторые аспекты

Ламберов Лев Дмитриевич  
lev.lamberov@urfu.ru

Уральский федеральный университет

14 февраля 2025 г.

# Слайды презентации



[https://www.pimentola.ru/talks/2025\\_moscow\\_seminar.pdf](https://www.pimentola.ru/talks/2025_moscow_seminar.pdf)





<https://www.uanalyticon.ru/links/index.ru.html>

# К вопросу о мотивации, I

- Зачем нужны компьютерные доказательства?
- Доказательства и альтернативные подходы к основаниям математики
- История Владимира Воеводского

## К вопросу о мотивации, II

### ■ Воеводский:

*Чтобы выполнить работу на том уровне строгости и точности, который я считал необходимым, потребовались бы огромные усилия, и получился бы текст, который было бы очень трудно читать. И кто бы мог гарантировать, что я ничего не забыл и не ошибся, если даже на выявление ошибок в гораздо более простых рассуждениях уходят годы? Думаю, именно в этот момент я в значительной степени перестал заниматься тем, что называется „исследованиями, вызванными любопытством“, и начал всерьёз задумываться о будущем. У меня не было инструментов, чтобы исследовать те области, куда меня вело любопытство, и те области, которые я считал ценными, интересными и красивыми.*

# Сложность современной математики

- Сложность математических результатов
- Сложность специализации математического знания

# Размеры доказательств

- Теорема Олмгрена (геометрическая теория меры): 972 страницы
- Теорема Робертсона-Сеймура (теория графов): около 600 страниц

# Зачем нужно математическое доказательство?

- Дэвис: случай с сомнением студента в справедливости обобщённого варианта теоремы Мерсера

# Специализация математического знания, I

- Рейтинг Scimago Journal Country Rank:
  - 2000 г. — 836 журналов
  - 2005 г. — 1084
  - 2010 г. — 1661
  - 2015 г. — 1984
  - 2020 г. — 2919
  - 2023 г. — 1756
- Пусть имеется 1500 журналов, каждый выходит 2 раза в год, объём одного выпуска 250 страниц. . .
- Тогда совокупный объём публикаций за год равен 750 тыс. страниц

# Специализация математического знания, II

- Статистика arXiv:
  - 2000 г. — 3537 статей
  - 2005 г. — 9200
  - 2010 г. — 18827
  - 2015 г. — 31297
  - 2020 г. — 39091
  - 2023 г. — 39999
- Пусть в год размещается 30 тыс. статей, объём каждой равен 20 страницам. . .
- Тогда совокупный объём статей за год равен 600 тыс. страниц

# Связь между видами сложности

- Неспециалисту труднее
- Пример: теорема о классификации простых конечных групп
  - более 100 человек
  - работы публиковались с 1955 по 2004 гг.
  - десятки тысяч страниц, большое количество промежуточных результатов
- Горенштейн, Лайонс, Соломон, Капдебоск: систематизация и упрощение доказательства
  - опубликовано 10 томов
  - общий объём 4061 страница
  - проект планируется завершить к концу 2026 г.

# Исторический обзор

- Помощь в вычислениях
- JOHNNIAC (1954): сумма двух чётных чисел является чётным числом (в арифметике Пресбургера)
- Машина логической теории (1957): 38 теорем из *Principia Mathematica*
- Метод резолюций (до 1970-ых)
- LCF (около 1980): тактики для (автоматического) построения доказательств на языке ML
- Развитие теории типов (в основном в компьютерных науках и теории доказательства)
  - Automath
  - Интуиционистская теория типов Мартин-Лёфа

# Близость программирования

- Два основных стиля:
  - процедурный стиль (Coq, HOL Light)
  - декларативный стиль (Mizar)
- Доказательство корректности программ
- Соответствие Карри-Говарда-Ламбека

# Конкретные особенности, I

- Теорема о четырёх красках
  - нормальная карта
  - неизбежный набор конфигураций
  - редуцируемость
- Гипотеза Кеплера о наиплотнейшей упаковке шаров
  - сеть как проекция графа
  - все возможные сети
  - линейная оптимизация

# Конкретные особенности, II

- Общие особенности:
  - комбинаторная сложность
  - позже получены формализованные доказательства
  - однако формализованные док-ва тоже требуют выполнения вычислений, разница в том, что теперь есть док-во того, что в ходе вычислительного процесса происходит именно то, что должно

# Вопросы доверия, I

- Релейабелизм и социальная эпистемология
- Доверие:
  - док-во построено верно
  - набор математического ПО корректно реализует математическую теорию
  - математическая теория верна
  - вычислительное устройство работает верно
- Малый размер ядра (HOL Light)
- Перевод док-в в другую систему (OpenTheory)
- Бисон: «Связь между доказательством и поддерживающими его вычислениями — слабое место математики»

## Вопросы доверия, II

- Тестирование на разных устройствах как эксперимент
- В настоящее время невозможно математически гарантировать, что устройство будет находиться в определённом физическом состоянии
- Априорное доказательство о каузальных сущностях невозможно?

# Обозримость, I

- Винер и его студент
- Тимочко: это не доказательства  $\oplus$  понятие док-ва следует пересмотреть
- Крипке: что *может* быть известно априорно  $\oplus$  что *должно* быть известно априорно
- Шэнкер (вслед за Витшенштейном): обозримость необходима, так как док-ва — правила употребления соответствующих математических символов
- Детлефсен, Лакер: эмпирический компонент — это не причина необозримости
- ... если что-то вообще является априорным...
- Бёрдж: восприятие — лишь способ доступа и вспомогательное условие, оно не меняет эпистемическую силу обоснования

# Обозримость, II

- Детлефсен и Лакер: эмпирический компонент не является необходимым условием обозримости
- Бёрдж: эмпирический компонент не является достаточным условием обозримости
- Бэсслер: два вида обозримости
  - глобальная обозримость
  - локальная обозримость
- Математические док-ва почти никогда не являются док-вами из первых принципов
- Родин: мезоскопическая обозримость
- Обозримость как характеристика *человеческой* математики

- Гильберт:

*Остановимся ещё кратко на вопросе о том, каковы могут быть общие требования, которые мы вправе предъявить к решению математической проблемы. Я имею в виду прежде всего требования, благодаря которым удаётся убедиться в правильности ответа с помощью конечного числа заключений и притом на основании конечного числа предпосылок [...]. Это требование логической дедукции с помощью конечного числа заключений есть не что иное, как требование строгости проведения доказательств. Действительно, требование строгости [...] соответствует общей философской потребности нашего разума*

- Фреге:

*Прежде всего я пытался свести к логическому следованию понятие упорядочения в некоторой последовательности, а затем от него перейти к понятию числа. Но для того чтобы в рассуждение не проникло незамеченным ничего из наглядно созерцаемого, я должен был всё привести к цепочкам умозаключений, не содержащих пропусков*

## Понимание и строгость, III

- Локальная обозримость как понимание переходом между элементарными шагами док-ва
- Строгость как непрерывность последовательности шагов и логическое следование
- Гильберт:

*Будет большой ошибкой думать при этом, что строгость в доказательстве — это враг простоты. Многочисленные примеры убеждают нас в противоположном: строгие методы являются в то же время простейшими и наиболее доступными. Стремление к строгости как раз и приводит к отысканию простейших доказательств. Это же стремление часто прокладывает путь к методам, которые оказываются более плодотворными, чем старые менее строгие методы*

# Понимание и строгость, IV

- Строгость как глобальная общезначимость vs. строгость как локальная общезначимость
- Способность к манипулятивному воображению
- Обращение к математической практике
  - математика не как абстрактная наука, а как человеческая деятельность со своей динамикой
  - практика доказательства основывается на представлении в воображении различных трансформаций
- Эта способность не является произвольной, а зависит от строгого набора правил и может быть сведена к последовательности шагов
- Пересмотр понятия доказательства в соответствии с математической практикой в духе фаллибилизма
  - формализуемость
  - общеиспользуемость (shareability)
  - перечислимость (transferability) как обобщение обозримости

## ■ Гильберт:

*[Г]еометрические фигуры являются образами для напоминания пространственных представлений и в качестве таковых применяются всеми математиками. Кто не связывает с двумя неравенствами  $a > b > c$  между тремя величинами  $a, b, c$  образ тройки прямолинейно расположенных и следующих друг за другом точек в качестве геометрической интерпретации понятия «между»? Кто не пользуется образом вложенных друг в друга отрезков и прямоугольников, если нужно провести полное и строгое доказательство трудной теоремы о непрерывности функций или существования предельной точки? [...] Применение геометрических фигур в качестве строгого средства доказательства предполагает точное знание и полное владение теми аксиомами, которые лежат в основе теории этих фигур, и поэтому для того, чтобы эти геометрические фигуры можно было включить в общую сокровищницу математических знаков, необходимо строгое аксиоматическое исследование их наглядного содержания. Подобно тому как при сложении двух чисел нельзя подписывать цифры слагаемых в неверном порядке, а нужно строго следовать правилам, [...] так и операции над геометрическими образами определяются теми аксиомами, которые лежат в основе геометрических понятий и связей между ними.*

# Понимание и строгость, VI

- Скотт о II Международном конгрессе математиков
- Символы (или знаки) у Гильберта
- 24-ая математическая проблема
  - задача по исследованию критериев простоты доказательства
  - задача по доказательству наибольшей простоты определённого доказательства
- Понятие сизигии, использованное в исследовании инвариантов
- Гильберт:

*Аксиоматика — это ритм, создающий музыку метода, волшебная палочка, направляющая все индивидуальные усилия к общей цели.*

# Понимание, строгость и основания, I

- Идеал как объединение *characteristica universalis* и *calculus ratiocinator*
- Противоположность Гильберта и Лейбница
- Язык, символы которого передают содержание математических понятий, и исчисление, с помощью которого выполняются механические манипуляции над символами
- Два направления развития идей Лейбница:
  - 1 чистая (бессодержательная) логика...
  - 2 неокантианство, Грассманы, Пеано, Фреге...
- Фреге:

*Используя выражения Лейбница, можно сказать: логика Буля есть некое calculus ratiocinator, но не lingua characteristica, математическая логика Пеано есть некоторая lingua characteristica, но наряду с этим также и calculus ratiocinator, тогда как в моей записи понятий (Begriffsschrift) акцент равно падает и на то, и на другое.*

## Понимание, строгость и основания, II

- Романтика, но цель, пусть «романтическая цель»
- Интенциональность, антиредукционизм, близость к математической практике
- Формализованные доказательства становятся более «естественными» и интуитивно понятными, но одновременно могут быть проверены/построены вычислительным устройством
- *Гипотеза*: движение вперёд в области сближения формализации и понимание — развитие альтернативных подходов к основаниям математики

Спасибо за внимание!